סיכום אינפי 2 הרצאה 1

מסמך זה נועד לסייע בלמידה ואינו מחליף את ההרצאות, התרגולים או חומרי הקורס הרשמיים.
ייתכנו בו טעויות או אי־דיוקים, ולכן אין להסתמך עליו כמקור יחיד.

הסיכום מכיל

הגדרות | משפטים | הוכחות | דוגמאות | מסקנות/הערות

מפת נושאים

01 **סדרות ממשיות**
הגדרת סדרה, סימון ושוויון סדרות

02 **גבול של סדרה**
התכנסות לפי ε והערות בסיסיות

03 **דוגמאות לגבולות**
חישובים לפי הגדרה ומשפטי גבול

04 **סוגי סדרות ותכונות גבול**
התבדרות, אינסוף ומונוטוניות

05 **מונוטוניות וחסימות**
משפטי גבול ודוגמה רקורסיבית

06 **תתי-סדרות**
הגדרה, דוגמאות וטענת עזר

07 **משפט הירושה**
גבול הסדרה עובר לתת-סדרה

08 **משפטי תתי-סדרות**
שימוש בתתי-סדרות לאי-התכנסות

חלק 1 - סדרות ממשיות

הגדרת סדרה, שוויון סדרות ודוגמאות ראשונות.

הגדרה - סדרה ממשית

יהי $0 \leq k \in \mathbb{Z}$. **סדרה של מספרים ממשיים**, המסומנת $(a_n)_{n=k}^{\infty}$, מוגדרת להיות פונקציה

$$a : \{n \in \mathbb{Z} : n \geq k\} \to \mathbb{R}$$

כאשר לכל $n \geq k$ הערך a_n הוא ערך הפונקציה ב- n , כלומר:

$$a_n = a(n)$$

ונקרא גם **האיבר ה- n בסדרה**.

דוגמה

נביט בסדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ המוגדרת על ידי:

$$a_n = (-1)^n \qquad \forall n \geq 0$$

לכן:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -1, \ldots$$

חלק 1 - סדרות ממשיות

הגדרת סדרה, שוויון סדרות ודוגמאות ראשונות.

דוגמה

נביט בסדרת פיבונאצ'י $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ המוגדרת על ידי:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \forall n \geq 2$$

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1$$

ולכן מתקבל:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13, \ldots$$

הגדרה - שוויון סדרות

יהיו $0 \leq k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, ותהיינה $(a_n)_{n=k_1}^{\infty}$ ו- $(b_n)_{n=k_2}^{\infty}$ שתי סדרות של מספרים ממשיים.

נאמר כי הן **שוות**, ונסמן $(a_n)_{n=k_1}^{\infty} = (b_n)_{n=k_2}^{\infty}$, אם:

1. $k_1 = k_2$
2. לכל $n \geq k_1$ מתקיים $a_n = b_n$.

חלק 2 - גבול של סדרה

התכנסות לגבול ממשי והקשר לגבולות של פונקציות.

הגדרה - גבול של סדרה

יהי $0 \leq k \in \mathbb{Z}$ ותהי $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים. יהי $L \in \mathbb{R}$.

נאמר כי L **הוא הגבול של הסדרה** $(a_n)_{n=k}^{\infty}$, או שהסדרה מתכנסת ל- L , ונסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, אם:

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים:

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

הערה 1

ההגדרה לעיל זהה במהותה להגדרה של $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

כלומר: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $M > 0$ כך שלכל $x > M$ מתקיים:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

חלק 2 - גבול של סדרה

התכנסות לגבול ממשי והקשר לגבולות של פונקציות.

הערה 2

לכן כל המשפטים שלמדנו לגבי גבולות פונקציות נכונים גם לסדרות:

1. יחידות הגבול.
2. אריתמטיקה של גבולות: $+$, $-$, $\cdot$, $\div$, $\sqrt{\ }$, $|\ |$ ואגף בסיס.
3. מונוטוניות הגבול.
4. סנדוויץ'.
5. מ $\times$ ח .

הגדרה - חסימות של סדרה

יהי $0 \leq k \in \mathbb{Z}$ ותהי $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים. נאמר כי:

1. $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ **חסומה מלמעלה** אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \geq k$ מתקיים $a_n \leq M$.
2. $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ **חסומה מלמטה** אם קיים $m \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \geq k$ מתקיים $a_n \geq m$.
3. $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ **חסומה** אם קיים $M > 0$ כך שלכל $n \geq k$ מתקיים $|a_n| \leq M$.

הערה 3

$(a_n)_{n=k}^{\infty}$ חסומה אם ורק אם היא חסומה מלמעלה ומלמטה.

חלק 3 - דוגמאות לגבולות

חישובי גבול לפי ההגדרה ומשפטי גבולות.

דוגמה - 1

נוכיח באמצעות הגדרת הגבול כי:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

פתרון: יהי $\varepsilon > 0$. מאכימדיות קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $N > \frac{1}{\varepsilon}$.

יהי $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $n \geq N$. אזי:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

חלק 3 - דוגמאות לגבולות

חישובי גבול לפי ההגדרה ומשפטי גבולות.

דוגמה - 2

יהי $\alpha > 0$. חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n}$$

פתרון: נשים לב שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\alpha - \frac{1}{n} = \frac{\alpha n - 1}{n} < \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} \leq \frac{\alpha n}{n} = \alpha$$

לכן לפי משפט הסנדוויץ':

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} = \alpha$$

חלק 3 - דוגמאות לגבולות

חישובי גבול לפי ההגדרה ומשפטי גבולות.

דוגמה - 3

חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$$

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

מאחר שלכל n מתקיים $|\sin n| \leq 1$.

חלק 4 - סוגי סדרות ותכונות גבול

התבדרות, גבולות אינסופיים ומונוטוניות.

הגדרה - גבולות אינסופיים והתבדרות

יהי $0 \leq k \in \mathbb{Z}$ ותהי $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים. נאמר כי:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ אם לכל $M > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $a_n > M$.
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ אם לכל $M < 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $a_n < M$.
3. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת** אם קיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = L$; ואם היא לא מתכנסת היא **לא מתכנסת**.
4. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **מתבדרת במובן הרחב** אם אחת האפשרויות מתקיימת: הסדרה מתכנסת, $\lim a_n = \infty$ או $\lim a_n = -\infty$.

הגדרה - מונוטוניות

יהי $0 \leq k \in \mathbb{Z}$ ותהי $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים. נאמר כי:

1. (a_n) עולה אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$.
2. (a_n) יורדת אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \leq a_n$.
3. (a_n) עולה ממש אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} > a_n$.
4. (a_n) יורדת ממש אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} < a_n$.
5. (a_n) מונוטונית אם מתקיים אחד מן הסעיפים (i) או (ii).
6. (a_n) מונוטונית ממש אם מתקיים אחד מן הסעיפים (iii) או (iv).

חלק 4 - סוגי סדרות ותכונות גבול

התבדרות, גבולות אינסופיים ומונוטוניות.

הערה 4

כל המשפטים מאינפי 1 ניתנים לנסחים מקבילים במובן הרחב:

1. אריתמטיקה כמו $\infty + \infty$, $\infty - \infty$.
2. סנדוויץ'.
3. סדרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב.

חלק 5 - מונוטוניות וחסימות

משפטי גבול לסדרות מונוטוניות ודוגמה רקורסיבית.

משפט - 1

תהי $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים. נניח כי $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ עולה.

אזי $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב, ו-

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq k\}$$

הוכחה

הוכחה: בתרגיל 2 שאלה 2ב.

משפט - 2

תהי $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים. נניח כי $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ יורדת.

אזי $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב, ו-

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq k\}$$

חלק 5 - מונוטוניות וחסימות

משפטי גבול לסדרות מונוטוניות ודוגמה רקורסיבית.

הוכחה

הוכחה: הכוונה להוכחה של משפט 1.

משפט - 3

יהי $0 \leq k \in \mathbb{Z}$ ותהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים. אזי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם ורק אם $(a_{n+k})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, ובמקרה זה:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

הוכחה

הוכחה: בתרגיל 2 שאלה 2א.

חלק 5 - מונוטוניות וחסימות

משפטי גבול לסדרות מונוטוניות ודוגמה רקורסיבית.

דוגמה - 4

נביט בסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת באופן רקורסיבי על ידי:

$$a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_1 = 9, \qquad a_2 = 6$$

נוכיח ש- (a_n) מתכנסת ונחשב את גבולה.

חלק 5 - מונוטוניות וחסימות

משפטי גבול לסדרות מונוטוניות ודוגמה רקורסיבית.

הוכחה - הוכחת דוגמה 4

נוכיח באינדוקציה שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \geq 4$.

בסיס האינדוקציה: $n = 1, n = 2$:

$$a_1 = 9 \geq 4, \qquad a_2 = 6 \geq 4$$

צעד האינדוקציה: יהיו $n, n+1 \Rightarrow n+2$. נניח ש- $a_n \geq 4$ וגם $a_{n+1} \geq 4$ ונוכיח ש- $a_{n+2} \geq 4$.

$$a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}} \geq \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$$

כעת נוכיח שהסדרה יורדת, כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \leq a_n$.

בסיס האינדוקציה: $a_2 = 6 \leq 9 = a_1$.

$$a_3 = \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} = \sqrt{9} + \sqrt{6} = 3 + \sqrt{6} \leq 6 = a_2$$

חלק 5 - מונוטוניות וחסימות

משפטי גבול לסדרות מונוטוניות ודוגמה רקורסיבית.

הוכחה - המשך הוכחת דוגמה 4

צעד האינדוקציה: יהיו $2 \leq n \in \mathbb{N}$. נניח ש- $a_{n+1} \leq a_n$ וגם $a_n \leq a_{n-1}$. נוכיח ש- $a_{n+2} \leq a_{n+1}$.

$$a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}} \leq \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n} = a_{n+1}$$

לכן הסדרה (a_n) יורדת וחסומה מלמטה על ידי 4 , ולכן היא מתכנסת. נאמר $L \in \mathbb{R}$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+2} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}) = \sqrt{L} + \sqrt{L} = 2\sqrt{L}$$

לכן $L = 2\sqrt{L}$, ולכן $L = 0$ או $\sqrt{L} = 2$, כלומר $L = 4$.

מכיוון ש- $L = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \geq 4$, נקבל $L \geq 4$; לכן:

$$L = 4$$

חלק 5 - מונוטוניות וחסימות

משפטי גבול לסדרות מונוטוניות ודוגמה רקורסיבית.

הוכחה - סיכום בקצרה - הוכחת דוגמה 4

סיכום בקצרה

1. מראים באינדוקציה שהסדרה חסומה מלמטה על ידי 4.
2. מראים באינדוקציה שהסדרה יורדת.
3. לכן היא מתכנסת, מציבים את הגבול ברקורסיה ומקבלים את הגבול 4.

חלק 6 - תתי-סדרות

הגדרה, דוגמאות והקשר לסדרות המקוריות.

הגדרה - תת-סדרה

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ שתי סדרות של מספרים ממשיים.

נאמר כי $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ היא **תת-סדרה** של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם קיימת סדרה עולה ממש של אינדקסים $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$b_k = a_{n_k}$$

בדוגמת המחיקה בהרצאה נשארים האיברים $a_2, a_3, a_5, a_8, a_9, \ldots$, ולכן:

$$b_1 = a_2, \quad b_2 = a_3, \quad b_3 = a_5, \quad b_4 = a_8, \quad b_5 = a_9$$

דוגמה - 4

נשים לב ששתי הסדרות הבאות הן תתי-סדרות של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

$$(a_{2k})_{k=1}^{\infty}$$

$$(a_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$$

הסדרה הראשונה היא תת-הסדרה של האיברים הזוגיים, והשנייה היא תת-הסדרה של האיברים האי-זוגיים.

חלק 6 - תתי-סדרות

הגדרה, דוגמאות והקשר לסדרות המקוריות.

הערה - טענת עזר 1

תהי $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה עולה ממש של טבעיים. אזי לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$n_k \geq k$$

הוכחה - הוכחת טענת עזר 1

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על k .

בסיס האינדוקציה: $k = 1$. מתקיים $n_1 \in \mathbb{N}$, ולכן $n_1 \geq 1$.

צעד האינדוקציה: $k \Rightarrow k+1$. יהי $k \in \mathbb{N}$ ונניח ש- $n_k \geq k$. מאחר שהסדרה עולה ממש, $n_{k+1} > n_k$. מכיוון ש- n_k, n_{k+1} טבעיים, נקבל $n_{k+1} \geq n_k + 1$.

$$n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k + 1$$

ולכן נכונה טענת האינדוקציה.

סיכום בקצרה

1. בסיס: האינדקס הראשון טבעי ולכן לפחות 1.
2. צעד: עליה ממש של טבעיים נותנת קפיצה של לפחות 1.
3. לכן לכל k מתקיים $n_k \geq k$.

חלק 7 - משפט הירושה

גבול של סדרה עובר לכל תת-סדרה.

משפט - 4 - משפט הירושה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים, ותהי $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה עולה ממש של טבעיים.

נניח כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב.

אזי תת-הסדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב ובנוסף:

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

הוכחה - הוכחת משפט הירושה

מקרה א: נניח שהסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, כלומר שקיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. נוכיח כי $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$.

יהי $\varepsilon > 0$. מהיות $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N_1$ מתקיים:

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

נבחר $K = N_1$. יהי $k \geq K$. מטענת העזר $n_k \geq k$, ולכן $n_k \geq k \geq K = N_1$.

לכן מתקיים עבור n_k :

$$|a_{n_k} - L| < \varepsilon$$

חלק 7 - משפט הירושה

גבול של סדרה עובר לכל תת-סדרה.

הוכחה - המשך הוכחת משפט הירושה

מקרה ב: נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. נוכיח כי $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$.

יהי $M > 0$. מהיות $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N_1$ מתקיים:

$$a_n > M$$

נבחר $K = N_1$. יהי $k \geq K$. מטענת העזר $n_k \geq k$, ולכן $n_k \geq k \geq K = N_1$.

$$a_{n_k} > M$$

חלק 7 - משפט הירושה

גבול של סדרה עובר לכל תת-סדרה.

הוכחה - המשך הוכחת משפט הירושה

מקרה ג: נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. נוכיח כי $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = -\infty$.

יהי $M < 0$. מהיות $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N_1$ מתקיים:

$$a_n < M$$

נבחר $K = N_1$. יהי $k \geq K$. מטענת העזר $n_k \geq k$, ולכן $n_k \geq k \geq K = N_1$.

$$a_{n_k} < M$$

הוכחה - סיכום בקצרה - הוכחת משפט הירושה

סיכום בקצרה

1. בכל מקרה מתחילים מהגדרת הגבול של הסדרה המקורית.
2. משתמשים בטענת העזר $n_k \geq k$ כדי להפוך תנאי על n לתנאי על k.
3. מקבלים את אותה התכנסות עבור תת-הסדרה.

חלק 8 - משפטי תתי-סדרות

שימוש בתתי-סדרות להוכחת אי-התכנסות.

דוגמה

תהי $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת המספרים הראשוניים בסדר עולה. אזי:

$$\lim_{k\to\infty} p_k = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

ולכן:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{p_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

כלומר $\left(\frac{1}{p_k}\right)$ היא תת-סדרה של $\left(\frac{1}{n}\right)$.

דוגמה

נביט בסדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ המוגדרת על ידי $a_n = (-1)^n$ לכל $n \geq 0$.

נשים לב כי:

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} (-1)^{2k} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} (-1)^{2k-1} = \lim_{k\to\infty} (-1) = -1$$

ולכן $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ לא קיים במובן הרחב.

חלק 8 - משפטי תתי-סדרות

שימוש בתתי-סדרות להוכחת אי-התכנסות.

משפט - 5

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים, ויהי $L \in \mathbb{R}$. נניח כי:

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = L$$

אזי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ו-

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

חלק 8 - משפטי תתי-סדרות

שימוש בתתי-סדרות להוכחת אי-התכנסות.

הוכחה - הוכחת משפט 5

יהי $\varepsilon > 0$. מהיות $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = L$ קיים $K_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k \geq K_1$ מתקיים:

$$|a_{2k} - L| < \varepsilon$$

מהיות $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = L$ קיים $K_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k \geq K_2$ מתקיים:

$$|a_{2k-1} - L| < \varepsilon$$

נבחר:

$$N = \max\{2K_1, 2K_2 - 1\}$$

יהי $n \geq N$.

אם n זוגי, אז קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש- $n = 2k$. לכן $2k = n \geq N \geq 2K_1$, ולכן $k \geq K_1$ ומתקיים:

$$|a_n - L| = |a_{2k} - L| < \varepsilon$$

חלק 8 - משפטי תתי-סדרות

שימוש בתתי-סדרות להוכחת אי-התכנסות.

הוכחה - המשך הוכחת משפט 5

אחרת, n אי-זוגי, ולכן קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש- $n = 2k - 1$. לכן $2k - 1 = n \geq N \geq 2K_2 - 1$, ולכן $k \geq K_2$ ומתקיים:

$$|a_n - L| = |a_{2k-1} - L| < \varepsilon$$

הוכחה - סיכום בקצרה - הוכחת משפט 5

סיכום בקצרה

1. משתמשים בהתכנסות של האיברים הזוגיים ובזו של האיברים האי-זוגיים.
2. בוחרים N שמכסה את שני הספים.
3. מפצלים n לזוגי או אי-זוגי ומקבלים את הגדרת הגבול לסדרה כולה.